Prova Scritta 20 Luglio 2010

Compito 1

---

1) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 6$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi / 3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Soluzione:

Il modulo di $\vec{s}$ si ottiene calcolando la radice quadrata del prodotto scalare di $\vec{s}$ con sé stesso:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(2\vec{a} + 3\vec{b})} = \sqrt{4\|\vec{a}\|^2 + 9\|\vec{b}\|^2 + 12\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta_{ab}} = 2\sqrt{151} \simeq 24.6$$

---

2) Un'auto si muove di moto uniformemente decelerato con decelerazione pari ad $a = -2\, m / s^2$. Determinare lo spazio che percorre prima di fermarsi sapendo che inizialmente ha una velocità $v_0 = 40\, m / s$.

Soluzione

Lo spazio percorso in funzione del tempo per il moto uniformemente decelerato in ipotesi è $s(t) = \frac{1}{2} a\, t^2 + v_0 t$. La velocità in funzione del tempo è $v(t) = a\, t + v_0$. Determiniamo, dall'espressione per la velocità, l'istante t_* in cui l'auto di ferma ovvero $v(t_*) = 0\, m / s$:

$$0 = a\, t_* + v_0 \Rightarrow t_* = -\frac{v_0}{a} = 20\, s\, .$$

A questo istante determiniamo infine lo spazio percorso:

$$s(t_*) = \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{a} = -\frac{v_0^2}{2a} = 400\, m\,.$$

---

3) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + 12b\,t + 4c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 24\,m/s$, $s(1\,s) = 20\,m$.

Soluzione

Derivando la legge oraria si ottiene $v(t) = 2a\,t + 12b$. Imponiamo i vincoli dati sul moto e calcoliamo i tre parametri incogniti:

$$\begin{cases} s(0s) = 4c = 8\,m \Rightarrow c = 2\,m \\ v(0s) = 12b = 24\,m/s \Rightarrow b = 2\,m/s \\ s(1s) = a{\cdot}s^2 + 12{\cdot}2\dfrac{m}{s}{\cdot}s + 8\,m = 20\,m \Rightarrow a = -12\,m/s^2 \end{cases}.$$

---

4) Determinare la velocità al suolo di un punto materiale che scivola su un piano inclinato in assenza di attrito partendo da una quota $h_0 = 10\,m$.

Soluzione

In assenza di attrito l'energia meccanica del punto è conservata. Essa è uguale alla somma dell'energia cinetica del punto e dell'energia potenziale della forza peso. Si noti che la reazione vincolare del piano non fa lavoro (perché agisce ortogonalmente alla direzione del moto) quindi è ininfluente rispetto al calcolo dell'energia meccanica. All'istante iniziale l'energia cinetica del punto è zero (il punto è fermo), in fondo al piano sarà nulla l'energia potenziale quindi:

$$E = mgh_0 = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_0} = 14\, m/s\ .$$

---

5) Determinare il raggio dell'orbita (in Km) di un satellite che ruota su una traiettoria circolare intorno alla terra con una velocità in modulo pari a $\|\vec{v}_0\| = 100\, Km/h$.

Soluzione

L'orbita del satellite è circolare (di raggio R da determinare) ed il suo moto è circolare uniforme. L'accelerazione del satellite è data dalla sola componente centripeta e, moltiplicata per m_s (la massa del satellite), essa è uguale alla forza agente sul satellite stesso (data dall'espressione della forza gravitazionale). Quindi:

$$m_s \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R} = \gamma \frac{m_s M_T}{R^2} \Rightarrow R = \gamma \frac{M_T}{\|\vec{v}_0\|^2} \simeq 5.16 \cdot 10^8\ Km\ .$$

Costanti: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N\, m^2\ Kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\ Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\ m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\ Kg$, $R_L = 1738\, Km$.

Prova Scritta 20 Luglio 2010

Compito 2

---

1) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi/3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Soluzione:

Il modulo di $\vec{s}$ si ottiene calcolando la radice quadrata del prodotto scalare di $\vec{s}$ con sé stesso:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 4\|\vec{b}\|^2 - 4\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta_{ab}} = \sqrt{201} \simeq 14.2 \,.$$

---

2) Un'auto parte da ferma e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2\,m/s^2$. Determinare la velocità v dell'auto dopo che ha percorso una distanza $s = 100\,m$.

Soluzione

Lo spazio percorso in funzione del tempo per il moto accelerato in ipotesi è dato dall'espressione $s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2$ e la velocità in funzione del tempo è $v(t) = a\,t$. L'istante t_* a cui lo spazio percorso è $100\,m$ si determina dalla prima espressione:

$$s(t_*) = \frac{1}{2}a\,t_*^2 = 100\,m \Rightarrow t_* = \sqrt{\frac{2\cdot 100\,m}{2\,m/s^2}} = 10\,s \,.$$

A quell'istante determiniamo la velocità:

$$v(t_*) = a\,t_* = 20\,m/s \,.$$

---

3) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 5a\,t^2 + 2b\,t + 2c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 6\,m/s$, $s(1\,s) = 25\,m$.

Soluzione

Derivando la legge oraria si ottiene $v(t) = 10a\,t + 2b$. Imponiamo i vincoli dati sul moto e calcoliamo i tre parametri incogniti:

$$\begin{cases} s(0s) = 2c = 8\,m \Rightarrow c = 4\,m \\ v(0s) = 2b = 6\,m/s \Rightarrow b = 3\,m/s \\ s(1s) = 5a \cdot s^2 + 2 \cdot 3\dfrac{m}{s} \cdot s + 8\,m = 25\,m \Rightarrow a = \dfrac{11}{5}\,m/s^2 = 2.2\,m/s^2 \end{cases} .$$

---

4) Un corpo puntiforme viene appoggiato ad un piano inclinato e quindi lanciato parallelamente al piano verso l'alto con una velocità, in modulo, pari a $v_0 = 20\,m/s$. Determinare, in assenza di attrito, la quota massima raggiunta dal corpo.

Soluzione

In assenza di attrito l'energia meccanica del corpo è conservata. Essa è uguale alla somma dell'energia cinetica del corpo puntiforme e dell'energia potenziale della forza peso. Si noti che la reazione vincolare del piano non fa lavoro (perché agisce ortogonalmente alla direzione del moto) quindi è ininfluente rispetto al calcolo dell'energia meccanica. All'istante iniziale l'energia potenziale del corpo è zero, nel punto di quota massima sarà nulla l'energia cinetica (il corpo è fermo) quindi:

$$E = \frac{1}{2} m\,v_0^2 = mgh_{MAX} \Rightarrow h_{MAX} = \frac{v_0^2}{2g} \simeq 20.4\,m .$$

---

5) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna con una velocità angolare in modulo pari a $\|\vec{\omega}_0\| = 10^{-8}\ s^{-1}$. Determinare il raggio dell'orbita del satellite in Km.

Soluzione

L'orbita del satellite è circolare (di raggio R da determinare) ed il suo moto è circolare uniforme. L'accelerazione del satellite è data dalla sola componente centripeta e, moltiplicata per m_s (la massa del satellite), essa è uguale alla forza agente sul satellite stesso (data dall'espressione della forza gravitazionale). Quindi:

$$m_s \|\vec{\omega}_0\|^2 R = \gamma \frac{m_s M_L}{R^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\gamma \frac{M_L}{\|\vec{\omega}_0\|^2}} \simeq 3.66 \cdot 10^6\ Km .$$

<u>Costanti</u>: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N\, m^2\ Kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\ Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\ m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\ Kg$, $R_L = 1738\ Km$.
